Université Paul Sabatier
L1 STS PCP

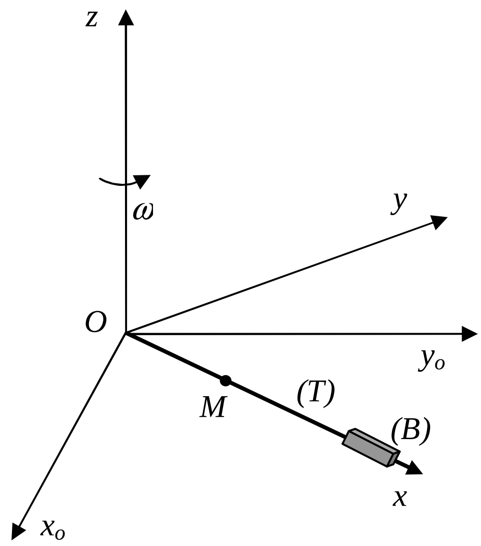
Toulouse, le 18 mai 2010

EXAMEN
DE MECANIQUE DU POINT
(Durée : 1h30)

Toutes les parties sont indépendantes. Toutes les justifications nécessaires seront notées.
Les documents personnels, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

I – Composition de mouvement

Une masselotte ponctuelle *M*, de masse *m*, peut glisser sans frottement sur une tige (*T*) perpendiculaire en *O* à un axe vertical ascendant *Oz*, au bout de laquelle est fixée une butée (*B*).



L'axe *z'z* est entraîné par un moteur qui fait tourner la tige (*T*) à la vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal x_oOy_o d'un repère galiléen $\Re_o$ fixe orthonormé direct $(O, x_o y_o z)$.

Soient $\left(\overrightarrow{e_{x_o}}, \overrightarrow{e_{y_o}}, \overrightarrow{e_z}\right)$ les vecteurs unitaires de chacun des axes du repère galiléen $\Re_o$, et $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ les vecteurs unitaires du repère orthonormé direct $\Re(O, xyz)$ lié à (*T*). La tige (*T*) est portée par l'axe *Ox*.

La masselotte est repérée par ses coordonnées (x, y, z), et tous les vecteurs seront explicités dans la base $B = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ liée à $\Re$.

A l'instant initial $t = 0$, la tige (*T*) est confondue avec l'axe Ox_o, et la masselotte est lancée depuis le point *O* avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_o} = v_o \overrightarrow{e_x}$ où $v_o > 0$.

On note *g* l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

1) Donner l'expression du vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}(\Re / \Re_O)$ de $\Re$ par rapport à $\Re_o$.

2) Donner la définition, puis déterminer l'expression de :
   a) la vitesse $\vec{v}\ (M / \Re)$ du point *M* dans $\Re$.
   b) la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e\ (M, \Re / \Re_o)$.
   c) l'accélération $\vec{a}\ (M / \Re)$ du point *M* dans $\Re$.
   d) l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e\ (M, \Re / \Re_o)$.
   e) l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c\ (M, \Re / \Re_o)$.

3) Enoncer les lois de composition des vitesses et des accélérations, et en déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}(M/\Re_o)$ et de l'accélération $\vec{a}(M/\Re_o)$ de M dans $\Re_o$.

4) Donner l'expression des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

5) Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur la masse dans $\Re$.

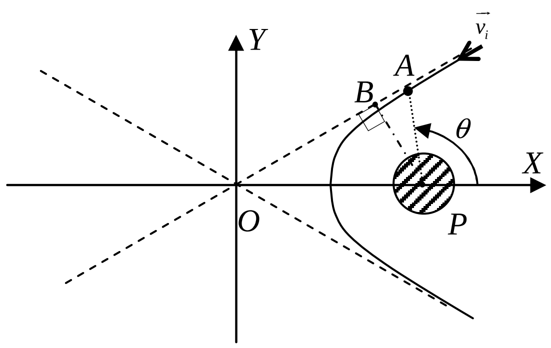
6) Enoncer la relation fondamentale de la dynamique dans $\Re$.

7) En déduire l'équation différentielle du mouvement dans $\Re$.

II – Impact d'un astéroïde sur une planète du système solaire (d'après AJP, août 2006)

On considère un astéroïde ponctuel *A*, de masse *m*, s'approchant d'une planète, de centre *P*, de masse *M*, avec une vitesse $\vec{v_i}$ par rapport au référentiel $\Re$, dont l'origine est *P*, et dont les trois axes sont parallèles à ceux du référentiel galiléen de Copernic.

$\vec{v_i}$ est la vitesse de *A*, lorsque l'astéroïde *A* est infiniment éloigné de la planète *P*. "L'impact" entre la planète et l'astéroïde se fait en un point *B*, et on désigne le paramètre d'impact par $b_i = PB$.



On négligera pour tout l'exercice l'influence de tout autre astre. De plus, on considère que $m \ll M$, de sorte que le problème à 2 corps peut se ramener à celui de *A* dans $\Re$.

On note *G* la constante universelle de gravitation.

1) Caractéristiques du mouvement de *A*, lorsque qu'il est en interaction avec *P*.
   a) Donner la définition d'une force centrale.
   b) La force d'interaction exercée par *P* sur *A* est-elle une force centrale ? Justifier.
   c) Donner la définition d'une force conservative.
   d) La force d'interaction exercée par *P* sur *A* est-elle une force conservative ? Justifier.
   e) Donner l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_P}(A/\Re)$ de *A* dans $\Re$, au point *P*.
   f) Déduire du théorème du moment cinétique appliqué sur *A*, au point *P*, les caractéristiques de $\overrightarrow{L_P}(A/\Re)$.
   g) Que peut-on en déduire pour le mouvement de *A* dans $\Re$?

2) <u>Energétique</u>
   a) Déterminer, en fonction de $r = PA$, l'expression de l'énergie potentielle d'interaction de A due à l'influence de P. On choisira comme origine de l'énergie potentielle, la position initiale de A, lorsqu'il est infiniment éloigné de P.
   b) Quelle est la caractéristique de l'énergie mécanique ? Justifier.
   c) Déduire du théorème de l'énergie mécanique, une relation entre la vitesse v de A, la vitesse initiale v_i de A, et $r = PA$ la position de A.

3) <u>Equation de la trajectoire</u> : l'énergie totale $\mathcal{E}$ de l'astéroïde est telle que A est dans un état de diffusion, et sa trajectoire est une hyperbole (A décrit donc une branche de l'équation mathématique caractéristique de la trajectoire).

   Dans le repère $\Re$, l'équation polaire de la trajectoire conique de A a pour expression :

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

   où $p = \dfrac{L^2}{m\left(GMm\right)}$, $e = \sqrt{1 + \dfrac{2\mathcal{E}L^2}{m\left(GMm\right)^2}}$, $L = \overrightarrow{L_P}\left(A/\Re\right)$, $r = PA$ et $\theta = \left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{e_x}\right)$.

   a) Comment appelle-t-on p et e ? Quelles sont leurs dimensions ? Préciser, dans le cas étudié, les valeurs que peut prendre e.
   b) Expliquer pourquoi on peut écrire $L = mv_ib_i$
   c) Déterminer alors l'expression de b_i en fonction de r, G, M et v_i.
   d) Déduire des questions précédentes les expression de p et e en fonction de v_i, G, M et b_i, puis l'expression de b_i en fonction de p et e.
   e) Sachant que dans le repère cartésien $\Re_{cart} = \left(O, XYZ\right)$ représenté sur la figure ci-dessus, l'équation de la trajectoire s'écrit $\left(\dfrac{X}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{Y}{b}\right)^2 = 1$, avec $p = \dfrac{b^2}{a}$ et $a = \dfrac{p}{e^2 - 1}$, exprimer b en fonction de b_i.
   f) Déterminer l'expression du périgée $r_{\min} = \left(PA\right)_{\min}$ en fonction de p et e.
   g) Exprimer la vitesse maximale de A, en fonction de v_i, G, M, p et e.